23.3.9 Grundlagen Bézier-Kurven

Die CurveTo-Methode der Klasse Paint verwendet zum Zeichnen → Kapitel 23.3.5.3 'Bézier-Kurven' Bézier-Kurven *dritten Grades*, die durch 4 Punkte bestimmt werden. Zwei Punkte (A und D) bestimmen den Anfangs- und Endpunkt der Kurve, deren Krümmungsverhalten Sie über die Lage aller 4 Punkte A, B, C und D → Abbildung 23.3.8.1 festlegen. Die Punkte B und C werden Stützpunkte genannt.

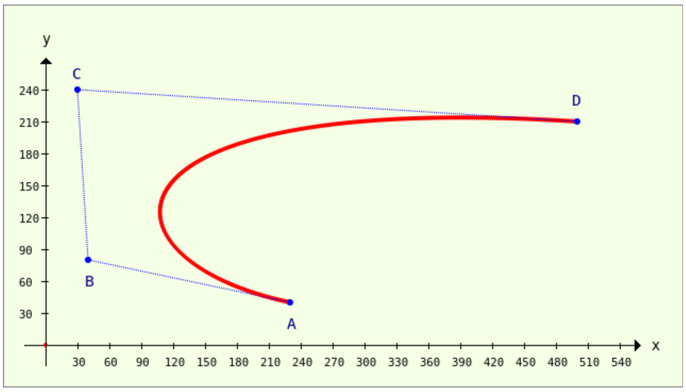

Abbildung 23.3.9.1: Bézier-Kurve 3. Grades (4 Punkte)

In diesem Kapitel wird der Versuch unternommen, aus der geometrischen Definition einer Bézier-Kurve *2. Grades* – für die es ja in der Klasse Paint *keine* Methode gibt – eine analytische Beschreibung einer Bézier-Kurve 2. Ordnung zu entwickeln. Damit wird die Erwartung verknüpft, dass Sie die Arbeit mit Bézier-Kurven 3. Grades besser verstehen, weil die Theorie von ähnlichen Ansätzen ausgeht.

Mit den gewonnenen expliziten Parameter-Gleichungen sowie den Methoden der Klasse Paint werden einige *Bézier-Kurven 2. Grades* gezeichnet.

23.3.9.1 Geometrische Definition einer Bézier-Kurve 2. Grades

Gegeben sind drei (verschiedene) Punkte A, B und C in einer (Koordinaten-)Ebene mit einer (normierten) Vektorbasis. Die Punkte A, B und C werden in der gezeigten Art verbunden. Auf den Verbindungslinien $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ existieren die beiden Teilungspunkte T1 und T2, auf deren Verbindungslinie $\overline{T1T2}$ der Punkt T liegt:

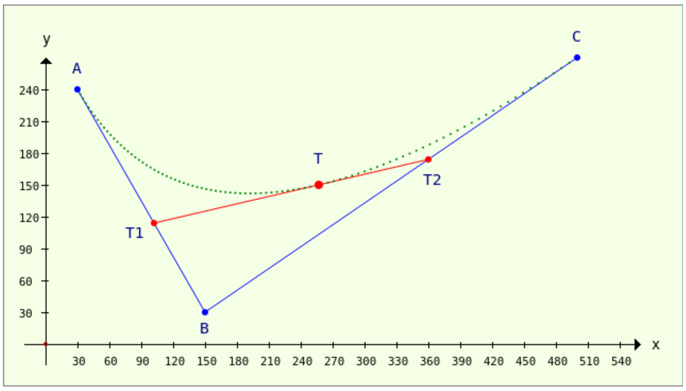

Abbildung 23.3.9.1.1: Bézier-Kurve – Definition 2. Grades (3 Punkte)

Für die drei Teilungspunkte T1, T2 und T gilt folgende Festlegung, die jeweils ihre Lage auf den Verbindungslinien bestimmt:

$$\overline{AT_1} : \overline{AB} = \overline{BT_2} : \overline{BC} = \overline{T_1T} : \overline{T_1T_2} = p : 1$$

Für jeden reellen Parameterwert p aus dem Intervall [0|1] ist T ein so genannter *Bézier-Punkt*. Die Menge aller Punkte T=T(p) ergibt die Bézier-Kurve AC von A nach C mit T(0) = A und T(1) = C. Die punktierte grüne Linie besteht aus ausgewählten Punkten der Bézier-Kurve AC.

Zeichnet man für ausgewählte Parameter p die Verbindungslinien der Punkte $\overline{TiTj}$, dann entsteht dieses Bild:

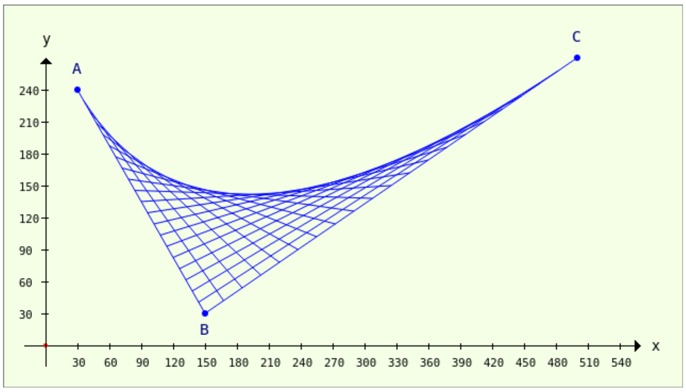

Abbildung 23.3.9.1.2: Darstellung von Verbindungslinien $\overline{TiTj}$

Sie können schon sehr deutlich die Hüllkurve aller Verbindungslinien der Punkte $\overline{TiTj}$ 'sehen'. Der Eindruck wird noch verstärkt, wenn die definierten Bézier-Punkte T auf den Verbindungslinien zusätzlich in rot eingezeichnet werden:

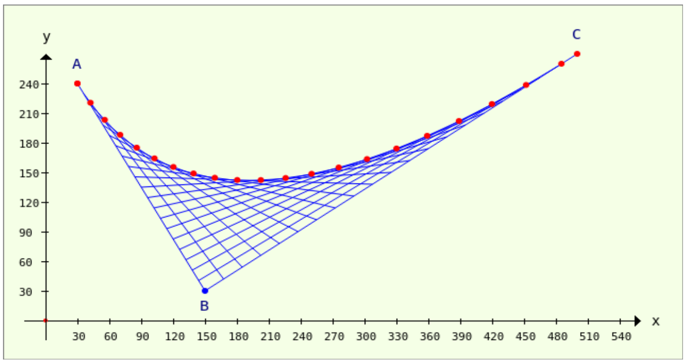

Abbildung 23.3.9.1.3: Bézier-Punkte

23.3.9.2 Analytische Beschreibung einer Bézier-Kurve 2. Grades

Gesucht ist eine analytische Beschreibung für die Koordinaten der Bézier-Punkte T = T(p) für jeden Parameterwert p aus dem Intervall 0 ≤ p ≤ 1 auf der Bézier-Kurve von A nach C:

$$(1)\quad \overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OA} + p\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + p\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) = (1-p)\cdot\overrightarrow{OA} + p\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$(2)\quad \overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OB} + p\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + p\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) = (1-p)\cdot\overrightarrow{OB} + p\cdot\overrightarrow{OC}$$

$$(3)\quad \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + p\cdot\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{OT_1} + p\cdot(\overrightarrow{OT_2}-\overrightarrow{OT_1}) = (1-p)\cdot\overrightarrow{OT_1} + p\cdot\overrightarrow{OT_2}$$

Aus den beiden Vektor-Gleichungen 1 und 2 gewinnt man die Gleichung 4 beziehungsweise 5, wenn man die Gleichungen 1 und 2 in 3 einsetzt:

$$(4)\quad \overrightarrow{OT} = (1-p)^2\cdot\overrightarrow{OA} + 2\cdot(1-p)\cdot p\cdot\overrightarrow{OB} + p^2\cdot\overrightarrow{OC}$$

$$(5)\quad \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} = (1-p)^2\cdot\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + 2\cdot(1-p)\cdot p\cdot\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + p^2\cdot\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$$

Aus der Gleichung 5 entstehen die beiden (expliziten) Parameter-Gleichungen 6 und 7 für die Berechnung der x- und y-Koordinate eines Bézier-Punktes der quadratischen Bézier-Kurve (2. Grades) zwischen den Punkten A und C, deren Krümmungsverhalten durch die Lage des Punktes B definiert wird:

$$(6)\quad x(p) = (1-p)^2 \cdot x_A + 2 \cdot (1-p) \cdot p \cdot x_B + p^2 \cdot x_C$$

$$(7)\quad y(p) = (1-p)^2 \cdot y_A + 2 \cdot (1-p) \cdot p \cdot y_B + p^2 \cdot y_C$$

23.3.9.3 Beispiele für Bézier-Kurven 2. Grades

Beispiel 1

Die Bézier-Kurve AB mit dem Stützpunkt B wird unter Verwendung der Gleichungen 6 und 7 und Methoden der Klasse Paint gezeichnet:

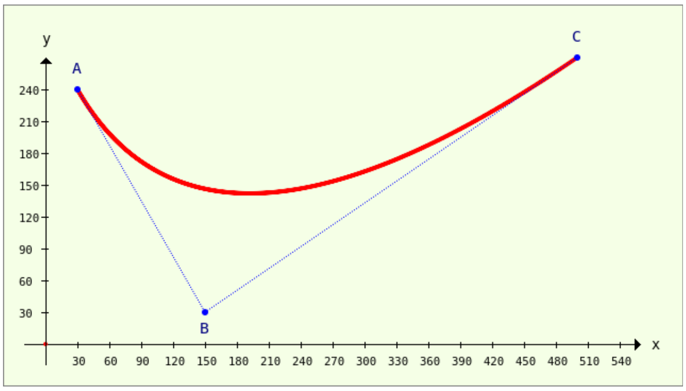

Abbildung 23.3.9.3.1: Bézier-Kurve AC – B(150|30)

Im folgenden Quelltext werden die Punkte A, B und C über globale Variablen vom Daten-Typ *PointF* deklariert und die beiden Gleichungen 6 und 7 als Funktionen implementiert:

```
Public A As PointF
Public B As PointF
Public C As PointF

Public Sub Form_Open()
  …
  A = New PointF
  A.x = 30
  A.y = 240
  B = New PointF(150, 30) ' Alternative Angabe der Koordinaten eines Punktes
  C = New PointF(500, 270)
  …
End ' Form_Open()

Public Function BézierX(p As Float, AX As Float, BX As Float, CX As Float) As Float
' Analytische Beschreibung x(p) einer Bézier-Kurve 2. Grades (3 Punkte)
  Return (1 - p) * (1 - p) * AX + 2 * (1 - p) * p * BX + p * p * CX
End ' BézierX(..)

Public Function BézierY(p As Float, AY As Float, BY As Float, CY As Float) As Float
' Analytische Beschreibung y(p) einer Bézier-Kurve 2. Grades (3 Punkte)
  Return (1 - p) * (1 - p) * AY + 2 * (1 - p) * p * BY + p * p * CY
End ' BézierY(..)
```

Die Prozedur *PaintScriptBézier3Points()* zum Zeichnen einer Bézier-Kurve 2. Grades nutzt die Prozeduren, die schon in den Projekt-Beispielen im → Kapitel 23.3.3 verwendet wurden:

```
Public Sub PaintScriptBezier3Points()
  Dim k As Integer
  Dim p As Float
  Dim vP As Vector

  GenerateNewPicture()
  SetPictureBorder()
  Paint.Begin(hPicture)
    Paint.Translate(xTranslate, yTranslate)
    Paint.Scale(xScale, yScale) ' +y ▲
    DrawCoordinateSystem()

  ' PARABEL-STÜCK
    Paint.Brush = Paint.Color(Color.Red)
    Paint.Brush = Paint.Color(Color.Red)
```

```
[16]     For k = 0 To (C.x - A.x)
[17]         p = k / 470
[18]         Paint.Arc(BézierX(p, A.x, B.x, C.x), BézierY(p, A.y, B.y, C.y), 2)
[19]     Next
[20]     Paint.Fill()
[21]
[22]   ' Verbindungslinien A-B-C
[23]     Paint.Brush = Paint.Color(Color.Blue)
[24]     Paint.LineWidth = 1
[25]     Paint.Dash = [1, 1]
[26]     Paint.MoveTo(A.x, A.y)
[27]     Paint.LineTo(B.x, B.y)
[28]     Paint.LineTo(C.x, C.y)
[29]     Paint.Stroke
[30]     Paint.Dash = Null
[31]
[32]   ' Punkte A, B und C
[33]     Paint.Arc(A.x, A.y, 3)
[34]     Paint.Arc(B.x, B.y, 3)
[35]     Paint.Arc(C.x, C.y, 3)
[36]     Paint.Fill
[37]
[38]   ' TEXT
[39]     Paint.NewPath
[40]     Paint.Scale(1, -1) ' +y ▼
[41]       Paint.Font = Font["Monospace, 11"]
[42]       Paint.Brush = Paint.Color(Color.DarkBlue)
[43]       Paint.DrawText("A", 25, -255)
[44]       Paint.DrawText("B", 145, -10)
[45]       Paint.DrawText("C", 495, -285)
[46]     Paint.Scale(1, -1) ' +y ▲
[47]   Paint.End
[48]
[49] End ' PaintScriptBezier3Points()
```

Kommentar:

- Die Bézier-Kurve wird in den Zeilen 15 bis 20 als *Punktfolge* gezeichnet.
- Mit den beiden Funktionen BézierX(..) und BézierY(..) werden die Koordinaten Tx und Ty jedes Bézier-Punktes T = T(p) im Intervall $0 \leq p \leq 1$ berechnet (T(0) = A und T(1) = C).
- Das Parameter-Intervall von $0 \leq p \leq 1$ wird in den Zeilen 16 und 17 für das Zeichnen der Bézier-Punkte auf das Intervall $0 \leq x \leq$ (C.x-A.x) abgebildet.
- In der Zeile 18 wird ein Bézier-Punkt T(p) mit den Koordinaten Tx und Ty als Kreis mit sehr kleinem Radius gezeichnet.
- In den weiteren Anweisungen ab Zeile 22 werden die Verbindungslinien AB und BC sowie die Punkte A, B und C gezeichnet. Abschließend werden die drei Punkte noch bezeichnet – jedoch ohne die Angabe von Koordinaten.

Beispiel 2

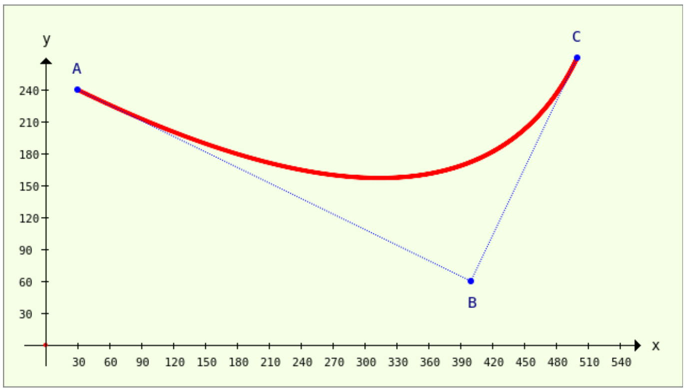

Abbildung 23.3.9.3.2: Bézier-Kurve – B(400|60)

Im zweiten Beispiel werden die Koordinaten des Stützpunktes B geändert. Die Koordinaten des Anfangspunktes A und des Endpunktes C bleiben gegenüber dem Beispiel 1 unverändert. Sehr deutlich ist der Einfluss des Punktes B auf den Kurvenverlauf der Bézier-Kurve zu sehen. Im Projekt 'BézierExkurs' können Sie die Koordinaten von B in weiten Grenzen ändern, um die Wirkung der Veränderung sofort zu sehen.